2.1 仿射空间 2020年7月13日11点34分

在几何上，曲线和曲面通常被认为是具有某些特殊属性的点集，它们生活在由“点”组成的空间中。通常，人们还对在某些变换（例如，平移，旋转，投影等）下不变的几何特性感兴趣。可以将点的空间建模为矢量空间，但是由于多种原因，这并不是很令人满意。原因之一是，在实际上没有理由拥有特权原点的情况下，与零向量（0）相对应的点被称为原点.另一个原因是某些概念（例如并行性）以笨拙的方式处理。但是，更深层的原因是向量空间和仿射空间确实具有不同的几何形状。向量空间的几何特性在双射线性映射组下是不变的，而仿射空间的几何特性在双射仿射映射组下是不变的,并且这两组不是同构的.粗略地说，仿射图比线性图要多.

仿射空间为做几何提供了更好的框架.特别地,可以以固有方式处理点,曲线，曲面等，即独立于坐标系的任何特定选择.与物理学一样,这是真正了解正在发生的事情的强烈要求.当然,必须选择坐标系才能最终进行计算，但是人们应该学会抵制诱惑，直到真正必要时才诉诸坐标系.

仿射空间是处理运动，轨迹和物理力等的正确框架.因此,仿射几何形状对于运动学,动力学和物理其他部分(例如弹性)的清晰表示至关重要.毕竟,刚体运动是仿射映射,但通常不是线性映射.同样,给定一个矩阵A和一个向量,则系统的解集通常是一个仿射空间,而不是矢量空间(线性空间).

本章进行如下。我们利用这样一个事实，几乎每个仿射概念都与线性代数中的某个概念相对应。我们从定义仿射空间开始，着重从点（粒子）和向量（力）的角度对定义进行物理解释。对应于向量的线性组合，我们定义了点的仿射组合（重心），意识到我们被迫将注意力集中在标量家族加起来为1上。对应于线性子空间，我们将仿射子空间引入为仿射组合下封闭的子集。然后,我们根据称为其方向的某些向量空间来描述仿射子空间.这使我们能够定义干净的并行性概念.接下来,对应于线性独立性和基数,我们定义仿射独立性和仿射框架。我们还定义了凸度。对应于线性图，我们将仿射图定义为保留仿射组合的图。我们表明，每一个仿射映射完全由一个点的图像和线性映射定义.我们简要地研究了一些简单的仿射映射,平移和中心扩张.仿射几何学的某些技术证明和一些补充材料已沦为附录（请参阅B章）.

我们对仿射几何的介绍远非全面,它偏向于曲线和曲面的算法几何.有关更多详细信息，请参阅Pedoe [59]，Snapper和Troyer [77]，Berger [5、6]，Samuel [69]，Tisseron [83]以及Hilbert和Cohn-Vossen [42].

假设我们有一个在3维空间中运动的粒子，并且我们想描述该粒子的轨迹.如果人们查阅一本好的动力学教科书，例如Greenwood [40]，就会发现该粒子被建模为一个点,并且该点x的位置是由 “参考系”中的向量决定的。奇怪的是，很少对参考系的概念进行精确定义,但是很容易推断出参考系是由原点和三个基向量构成的的.例如,中的标准参考系具有原点和三个基向量然后通过从到的“唯一矢量”定义点的位置.

**因此，我们发现了向量和点之间的主要区别:向量的线性组合的概念与基无关,但是点的线性组合的概念与参考系有关.为了挽救点的线性组合的概念,需要一些约束:标量系数必须相加为1**.

事实证明,以上属性,尽管在的情况下是微不足道的,但仅是定义仿射空间(或仿射结构)的抽象概念所需要的.基本思想是考虑两个(不同的)集合和,其中是一组点(无结构).而是作用于集合的向量空间(自由向量).我们可以将的元素看作是移动E中点的力,被视为物理粒子.向点施加力(自由矢量)的效果是平移.这样，我们的意思是，对于每个力,力u的作用是将每个点a∈E“移动”到通过将对应于u的平移视为矢量而获得的点a u∈E.由于可以组成平移，因此是向量空间是很自然的.

**定义2.1.1** 仿射空间要么是空集,要么是由非空集(点集),向量空集(平移,或自由向量)和运算规则组成的三元组,满足下列条件.

1. ;
2. ;
3. 对于任意两个点,存在唯一的,使得.其中被记为,或有时被记为.因此,我们写作

仿射空间的维度是向量空间的维度.为了简单起见,将其表示为.

请注意加号+的重载.在向量上加法是明确定义的,例如在u + v中,点a∈E由向量u∈-→E的平移a + u也很明确，但是点a + b的加法没有意义。 在这方面，唯一矢量u的符号b-a使得b = a + u有点令人困惑，因为它暗示可以减去点（但不能相加！）。 然而，我们将在10.1节中看到点的线性组合，甚至点和向量的混合线性组合的意义.

**2.3 Chasles等式** 2020年9月3日09点51分

**2.4 仿射组合,重心** 2020年7月14日16点26分

**引理2.4.1** 给定一个仿射空间E,令为E中的一个点族,令为一个标量族.对于任意两个点,以下属性成立:(1)如果,则

(2)如果,则

因此,根据引理2.4.1,对于E中的任何点族和任何标量族,使得,则点

独立于原点的选择.该唯一点称为分配了权重的点的重心(或重心组合或仿射组合). 它表示为

在处理重心时,可以方便地引入加权点的概念,该点只是一对其中是点,而是标量.然后,给定一个加权点族,其中,我们说点是加权点族的重心.注意加权点族的重心是唯一点,使得

从物理上讲,重心是加权点族的质心(其中质量已归一化,因此,并且允许负质量).

**备注**:

对于所有,很容易证明可以通过重复计算两个加权点的重心来获得个加权点的重心.

当时,矢量不依赖于点,我们可以将其表示为.该观察将在第10.1章中使用,以定义一个向量空间,在该向量空间中,点和向量的线性组合是有意义的,而与的值无关.

**2.5 仿射子空间** 2020年7月15日13点24分

**定义2.5.1** 给定一个仿射空间,的子空间是仿射空间仅当中每一个加权点族使得,并且重心属于V.

根据定义2.5.1,空集是一个仿射子空间,每个仿射子空间的交集都是一个仿射子空间.

引理2.5.2 令是一个仿射空间.

1. E的一个非空子集V是仿射子空间当且仅当对于每一个点,集合是的子空间.因此,,此外,是的子空间并且对所有成立.因此,.
2. 对于的任意子空间V,任意,集合是一个仿射子空间.

**引理2.5.3** 给定一个仿射空间,对E中任意点族,重心(其中)构成的集合V是包含的最小仿射子空间.(**证明过程没有理解透彻**)

**注意**:由于n个加权点的重心可以通过重复计算两个加权点的重心来得到,因此E的非空子集V是一个仿射空间当且仅当对于任意两点,集合V包含所有a和b的重心组合.如果V至少包含两个点,V是一个仿射子空间当且仅当对于任意两个不同点,集合V包含由a和b确定的直线,即,所有点的集合.

本节内容初次学习评分:4分.

**2.6 仿射独立和仿射参考系** 2020年7月16日15点35分

**引理2.6.1** 给定一个仿射空间,令是中的一个点族.如果该族对于 某些是线性独立的,则对于每一个都是线性独立的.

**定义2.6.2** 给定一个仿射空间,中的点族是仿射独立的仅当族对于某些是线性独立的.

**引理2.6.3** 给定一个仿射空间,令是E中的一个族.设,并且假设,其中.则,族使得是唯一的当且仅当族是线性独立的.

定义2.6.4 给定一个仿射空间,以为原点的仿射参考系是E中m+1个点使得是的一个基.同样页被称为以为原点的仿射参考系.则每一个均可以表达为

其中标量族是唯一的,被称为仿射参考系的坐标.此外,每一个均还可以表达为

是唯一的且被称为x对于的重心坐标.

**2.7 仿射映射** 2020年9月3日15点40分

**定义2.7.1** 给定两个仿射空间和,函数是仿射映射当且仅当对E中每一个权重点族使得,我们有

换句话说,仿射映射保持重心坐标不变.

**引理2.7.2** 给定一个仿射映射,存在唯一的线性映射,使得

对每一个和每一个都成立.

**剩余内容也值得一读**.